Métodos Numéricos
4 de Junio de 2012
Segundo Parcial

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

A

	Nombre y Apellido	Nota: 60		
▷ Resolver ejercicios en hojas separadas ▷ Completar nombre en las hojas ▷ Completar LU y nombre en el enunciado ▷ **Justificar todas las respuestas**	Libreta Universitaria	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3
		24	21	15

Resolver cada problema en hojas separadas y poner nombre en cada hoja, por favor.
Justifique **todas** sus respuestas.

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 1$. Consideramos $B \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1}$ definida como

$$B = \begin{bmatrix} A & ae_1 \\ ae_1^t & 1 \end{bmatrix},$$

con $a \in \mathbb{R}$ y e_1 el vector canónico.

(a) Supongamos que B es simétrica definida positiva. Encontar la descomposición de Cholesky de B. (20 puntos)

(b) Dar condiciones sobre A y determinar el rango de valores de a para que la matriz B sea simétrica definida positiva. (10 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Consideramos la factorización $PA = LU$ obtenida utilizando el algoritmo de Gauss con pivoteo parcial. Demostrar que $\|A\|_\infty \leq n\|U\|_\infty$. (15 puntos)

(b) Demostrar que existe una matriz triangular superior $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $\|A\|_2 = \|U\|_2$ y $|\det(A)| = |\det(U)|$. (10 puntos)

(c) Se define la norma vectorial $\|x\|_{(\alpha,A)} = \|Ax\|_\alpha$, con $\alpha = 2, \infty$. Para los items (a) y (b), dar condiciones sobre A y la respectiva U de forma tal que $\|\cdot\|_{(\alpha,A)}$ defina una norma. (10 puntos)

3. (a) ¿Cuáles de los siguientes tipos de matrices son necesariamente ortogonales? En cada caso, demostrar o dar un contraejemplo (20 puntos)

i. Permutación.
ii. Simétrica definida positiva.
iii. No singular.
iv. Diagonal.

(b) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz triangular superior con $a_{ii} > 0$, para $i = 1, \ldots, n$, y ortogonal. Demostrar que $A = I$. (15 puntos)

(1) B a)

Si B es sdp $\Leftrightarrow$ B tiene factorización de Cholesky

$\Rightarrow B = L L^t$

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline a\,0 \dots 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} L' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline c^t & l_{11} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} L'^t & c \\ \hline 0 \dots 0 & l_{11} \end{array}\right)$$

con $l_{11} > 0$, $l'_{ii} > 0 \ \forall_{0 \le i \le n}$ y L' triangular inferior

Multiplicando bloques nos queda que

$$L L^t = \left(\begin{array}{c|c} L' L'^t & L' c \\ \hline c^t L'^t & c^t c + l_{11}^2 \end{array}\right)$$

Igualando a B...

$A = L' L'^t$

$a e_1 = L' c$

$a e_1^t = c^t L'^t$

$1 = c^t c + l_{11}^2 = \|c\|_2^2 + l_{11}^2$

Falta justificar

Como A es conocido $\Rightarrow L' L'^t$ (su factorización de Cholesky) también ¿Por qué existe?

NOTA

entonces podríamos obtener c despejando

$$c = (L')^{-1} a \cdot e_1$$

$$c = a \cdot \text{columna}_1 (L'^{-1})$$

y

$$|l_{11}| = \sqrt{1 - \|c\|_2^2}$$

concluimos también que A ~~tiene~~ es simétrico definido positiva xq tiene Cholesky ($A = L' L'^t$, l'_{ii} y $l_{ii} > 0$)

También por ser un menor ppal de B.

b) quiero que $x^t B x > 0 \quad \forall x \neq 0$

en particular para $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big\} n$

$$\tilde{x}^t B \tilde{x} = \sum \sum a_{ij} > 0$$

Condición para $A \rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$

A tiene que cumplir más cond.

$\Downarrow$

A s.d.p.

(x lo demás sabemos que es s.d.p) ok

además:

$$e_{n+1}^t B e_{n+1} > 0$$

$$\boxed{a > 0}$$

$e_{n+1}^t B e_{n+1} = 1$ (no "a")

La condición para el rango de A se obtiene de la def. de l_{11}: ¿qué tiene que pasar para que esté bien definido?

NOTA

HOJA N° 2

FECHA

(2) a) $PA = LU$

$\Rightarrow A = P^{-1} L U$

inducida

$\| A \|_\infty = \| P^{-1} L U \|_\infty \leq$

$\leq \underbrace{\| P^{-1} \|_\infty}_{1} \| L \|_\infty \| U \|_\infty =$ ← FALTA JUSTIFICAR

$= \| L \|_\infty \| U \|_\infty$

Como la eliminación Gaussiana se hizo con pivoteo parcial,

$\Rightarrow \forall\ l_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

El elemento de la diagonal fue siempre el maximo (a_{kk})

$\Rightarrow l_{ij} \leq 1$

para cualquier $i \rightarrow \sum_{j=1}^{n} |l_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} 1 = n$ ✓

En especial para el maximo

$\Rightarrow \| L \|_\infty = \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |l_{ij}| \right) \leq n$ ✓

Luego $\| A \|_\infty \leq \| L \|_\infty \| U \|_\infty \leq n \| U \|_\infty$ ✓

NOTA

b) Se que $\forall A$, $\exists$ Q ortogonal y R triangular superior / $A = QR$.

~~det(A)~~ Quiero mostrar que $U = R$.

- $$\det(A) = \det(QR) = \underbrace{\det(Q)}_{1 \text{ o } -1} \det(R)$$

$$\det(A) = \pm \det(R)$$

$$|\det(A)| = |\det(R)| \quad \checkmark$$

- $$\| A \|_2 = \| QR \|_2 = \| R \|_2$$

ES VERDAD, PERO PORQUE VALE?

HOJA Nº 3

FECHA

(3) a)

i) Las matrices de permutación son necesariamente ortogonales ya que tienen como característica que sus filas son linealmente independientes (idem columnas).

No alcanza, deben ser ortonormales

Además son ortonormales y al multiplicarlo por un vector no modifican su norma 2 ya que los elementos son los mismos pero con orden invertido.

Es por esto que son ortonormales.

ii) NO. Contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^t A x = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 2x_2^2 > 0$$

A es simétrica def positiva

Sin embargo, sabemos que

Q ortogonal $\Rightarrow \det(Q) = 1$ ó -1

o es lo mismo

$\det(Q) \neq 1$ ó $-1 \Rightarrow Q$ no es ortogonal

y $\det(A) = 4 \neq 1$ ó -1

Luego, A no es ortogonal

NOTA

iii) NO. Contraejemplo

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\exists\ x \neq 0 \left(x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ tal que $Ax = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ X

Al revés! Tenías que partir de una inversible y llegar a que no era ortogonal.

$\Rightarrow$ A no es inversible

Veamos que no es ortogonal

$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I$

Luego A no es ortogonal

iv) NO. Contraejemplo

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Como vimos en (ii) D no es ortogonal. ✓

(3) b) Sabemos x hipótesis que vale que

$A\ A^t = I$

Desarrollemos esta igualdad.

NOTA

HOJA N° 4

FECHA

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, a_{ij}^{t} = I$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, a_{ji} = I$$

Suma de escalares no puede ser igual a una matriz ✗

No confundir con $(AA^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} a_{jk}$

Veamos qué pasa cuando $i = j$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \, a_{ii} = I_{ii} = 1$$ ✗ $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}^2 = 1 \ \forall i$

$$\Rightarrow a_{ii}^2 = 1$$

→ Acá estás multiplicando los elementos de la diagonal

$$a_{ii} = 1 \quad (a_{ii} \neq -1 \times \text{hipótesis})$$ ✗

Veamos ahora cuando $i > j$ $(i \neq 1)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, a_{ji} = 0$$ ✗ $\sum_{k=1}^{m} a_{ik} \, a_{jk} = 0$

Esto lo sabemos porque A es triangular superior (eso nos dice mucho de A)

Veamos finalmente el caso $i < j$ $(j \neq 1)$

(esto vale xq $i<j$)

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, a_{ji} = \underbrace{\sum \sum a_{ij}^2}_{\|A\|_F^2} = 0$$ ✗

$$\Rightarrow \|A\|_F^2 = 0$$

$$\|A\|_F^2 \geq \|A\|_2^2 \Rightarrow \|A\|_2^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$A = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i<j$$ ✗ ∎

NOTA

$\Rightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i,j \ , \ A = 0 \neq I$